



پایه دوازدهم تجربی

آزمون های شبیه ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



دفترچه سؤال

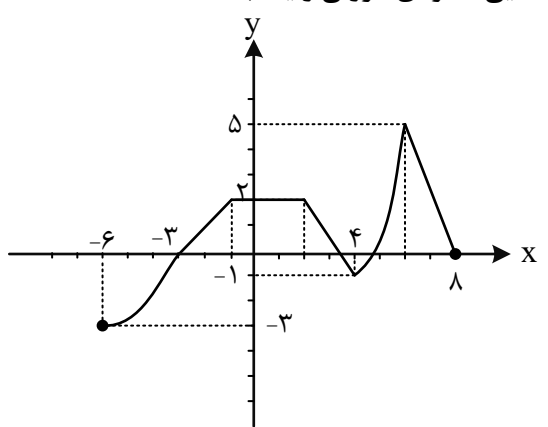
دوره زودبست دی ماه

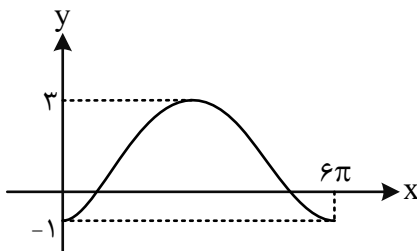
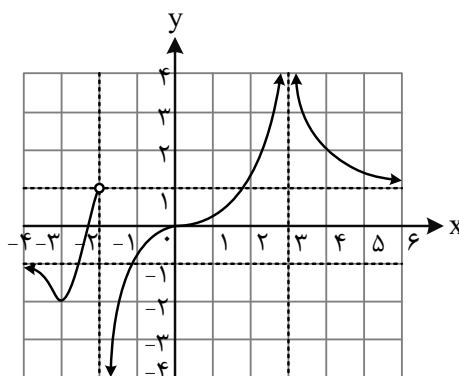
بسته جامع آمادگی نیم سال اول

بودجه آزمون: صفحات ۱ تا ۷۶

ردیف	درس	تعداد صفحه	زمان پاسخگویی
۱	ریاضی (۳)	۳	۱۲۰ دقیقه

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه آرای، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می شود.

سؤالات آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم		رشته: علوم تجربی		تاریخ آزمون: دی‌ماه ۱۴۰۴	
تعداد صفحه: ۳		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع:		نام و نام خانوادگی:	
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی				گروه آموزشی ماز			
ردیف		سؤالات (پاسخ‌برگ دارد)					
نمره							
۱		درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (الف) هر تابع یکنوا، یک‌به‌یک است. (ب) خط $y = \frac{-2}{3}$، نمودار تابع $y = \cos x$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ در یک نقطه قطع می‌کند. (پ) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و $L > 0$، در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ می‌باشد.					
۲		جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. (الف) نقطه $(2, -1)$ در تابع $y = -f(2x+1) - 1$ متناظر با نقطه در تابع $f(x)$ است. (ب) اگر $\tan \alpha = m + 2$ و $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$، آن‌گاه بیشترین مقدار ممکن m برابر با است. (پ) اگر $(1+x, 3x)$ یک همسایگی عدد ۳ باشد، حدود x، بازه است.					
۳		با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی و یا ثابت است. 					
۴		اگر $f(x) = x + a$ و $g(x) = ax^2 + bx + c$ باشند، a، b و c را طوری تعیین کنید که داشته باشیم: $(fog)(x) = x^2 - 3x + 4$					
۵		اگر $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = \sqrt{x^2-16}$ باشد، آن‌گاه دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.					
۶		اگر $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$، ضابطه تابع $g(x)$ را به‌دست آورید.					
۷		نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + 3x - 1$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین، سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحله آخر نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. ضابطه نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید.					
۸		تابع $g(x) = -5 - \sqrt{3x-1}$ را در نظر بگیرید. (الف) ضابطه وارون تابع g را به‌دست آورید. (ب) تابع g و وارون آن را در یک صفحه رسم کنید.					
		صفحه ۱ از ۳					

سؤالات آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم	رشته: علوم تجربی	تاریخ آزمون: دی‌ماه ۱۴۰۴
تعداد صفحه: ۳		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع:	نام و نام خانوادگی:
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی			گروه آموزشی ماز	
ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد)			
نمره				
۹	دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sqrt{5} - \pi \cos(\frac{1}{4}x)$ را به‌دست آورید.			
۱۰	شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a \cos(bx) + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه آن را مشخص کنید. 			
۱۱	مقدار $\cos 67^\circ / 5^\circ$ را به‌دست آورید.			
۱۲	مثلی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟			
۱۳	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x) = 2x^3 + ax^2 - bx + 2$ بر $x + 2$ بخش‌پذیر و باقی‌مانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر ۲ باشد.			
۱۴	حاصل‌دهای زیر را به‌دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است.) الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x - 6}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 3x + 2}$ پ) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-[x] - 1}{x^2 - 4}$ ت) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-(1-x)^3}{2x - x^2 + 5x^3}$			
۱۵	برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به‌دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$ پ) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$ ت) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) =$ 			
صفحه ۲ از ۳				

سؤالات آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم		رشته: علوم تجربی		تاریخ آزمون: دی‌ماه ۱۴۰۴			
تعداد صفحه: ۳		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع:		نام و نام خانوادگی:			
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی				گروه آموزشی ماز					
ردیف		سؤالات (پاسخ‌برگ دارد)						نمره	
۱۶		با توجه به نمودار تابع مقابل: الف) در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع منفی است؟ ب) در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع برابر صفر است؟ پ) در بین نقاط داده شده کدام نقطه بیش‌ترین شیب را دارد؟ ت) شیب نقاط A و D را با هم مقایسه نمایید.						۱	
۱۷		مطابق شکل زیر، خط d بر نمودار تابع f در نقطه $(۲, ۶)$ مماس است. حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(۲) - f(۲+h)}{۳h}$ را به‌دست آورید.						۰/۷۵	
۱۸		مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{1-x}$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x = -۱$ به‌دست آورید.						۱/۵	
		موفق باشید.						۲۰	
		صفحه ۳ از ۳							



پایه دوازدهم تجربی

آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



پاسخبرگ ریاضی (۳)

دوره زودبست دی ماه

بسته جامع آمادگی نیم سال اول

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

ساعت شروع:	رشته: علوم تجربی	تعداد صفحه: ۵	آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبیه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱	الف) ب) پ)	۰/۷۵
۲	الف) ب) پ)	۰/۷۵
۳		۱/۲۵
۴		۱
۵		۱/۲۵
۶		۰/۷۵

آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۵	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۷		۱
۸	الف) ب)	۱/۲۵
۹		۰/۷۵
۱۰		۱/۵

آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۵	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۱		۱
۱۲		۱/۲۵
۱۳		۱
۱۴	(الف)	۰/۵
	(ب)	۰/۷۵
	(پ)	۰/۵
	(ت)	۰/۵

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۵	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۵	الف) ب) پ) ت)	۱
۱۶	الف) ب) پ) ت)	۱

ساعت شروع:	رشته: علوم تجربی	تعداد صفحه: ۵	آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبیه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۷		۰/۷۵
۱۸		۱/۵
	موفق باشید.	۲۰



پایه دوازدهم تجربی

آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



دفترچه پاسخ

دوره زودبست دی ماه

بسته جامع آمادگی نیم سال اول

بودجه آزمون: صفحات ۱ تا ۷۶

ویراستاران

ارسلان حسنونند - نرجس تیمناک
حمیدرضا ولی‌پور

طراحان

سیدجواد نظری - محدثه شیخعلی

درس

ریاضی (۳)

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

مصحح شو:



پاسخ دقیق سؤال این جا میاد و اسمش روشه: «مصحح شو»، می خواد شما رو به یه مصحح حرفه‌ای و دقیق تبدیل کنه که بدونین موقع ارزیابی جواب‌هاتون باید حواستون به چی باشه تا توی آزمون‌های بعدی دقیق‌تر عمل کنین. اگه جواب یه سؤال رو بشه به شکل‌های مختلف بیان کرد، اون هم، این جا بهتون گفتیم.

بررسی دقیق‌تر:



اگه پاسخ کوتاه به سؤال کافی نباشه تا ببینین چطوری باید به جواب برسین، توی این بخش با بررسی دقیق‌تر جواب، سؤال رو براتون توضیح دادیم.

نقشه نهایی:



امتحان نهایی قوانین و قواعد خاص خودش رو داره؛ شما باید بدونین تیپ‌های رایج سؤال‌های امتحان نهایی چیه و باید چطوری بهش جواب بدین. این کادر، مشاوره حرفه‌ای ماست به شما تا فوت و فن‌های امتحان نهایی رو یاد بگیرین.

۲۰ شو:



توی «۲۰ شو»، مبحث هر سؤال رو براتون مرور یا جمع‌بندی کردیم؛ «۲۰ شو» و درسنامه‌هاش دقیقاً فاصله بین نمره خوب و نمره ۲۰ رو براتون پر می‌کنه.

نکته طلایی:



با وجود «۲۰ شو»، که کلی درسنامه مفصل داره، باز هم اگه نکته مهم و مفیدی بود، توی این کادر براتون آوردیم.

تیم اجرایی و تولید آزمون

مرضیه بنیانی

یگانه پوراابراهیم

زهره جعفری

فائزه زارع

محدثه شیخ علی

محدثه عربگری

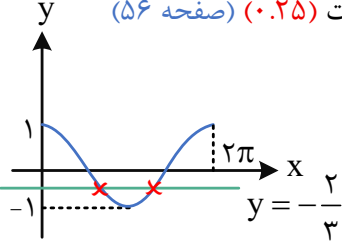
ساره محمدعلی نسب

زینب مرتضوی

سرپرست آزمون: ارمغان قریب

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

دکتر رسول خنجری

راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		رشته: علوم تجربی
دوره دوم متوسطه - دوازدهم	تاریخ آزمون: دی‌ماه ۱۴۰۴	ساعت شروع:
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	مصحح شو الف) نادرست (۰.۲۵) (صفحه ۷) ب) نادرست (۰.۲۵) (صفحه ۲۲) پ) نادرست (۰.۲۵) (صفحه ۵۶) بررسی دقیق‌تر: الف) هر تابع اکیداً یکنوا، یک‌به‌یک است. ب) دو نقطه برخورد  پ) در صورتی درست است که $g(x)$ در یک همسایگی محذوف $x = a$ تعریف شده و مثبت باشد. سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه	۰/۷۵
۲	مصحح شو الف) (۵,۰) (۰.۲۵) (صفحه ۲۲) ب) -۱ (۰.۲۵) (صفحه ۴۱) پ) (۱,۲) (۰.۲۵) (صفحه ۵۳) بررسی دقیق‌تر: الف) $A(2, -1) \Rightarrow -1 = -f(5) - 1 \Rightarrow f(5) = 0 \Rightarrow A'(5, 0)$ ب) از آن‌جا که $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$، $0 \leq \tan \alpha \leq 1$ و بنابراین $-2 \leq m \leq -1$ پ) اگر بازه $(1+x, 3x)$ یک همسایگی عدد ۳ باشد، یعنی $3 \in (1+x, 3x)$ و در نتیجه $\begin{cases} 1+x < 3 \Rightarrow x < 2 \\ 3 < 3x \Rightarrow 1 < x \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 2$ سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه	۰/۷۵
۳	مصحح شو بازه‌های صعودی: $[-6, 2] \cup [4, 6]$ (۰.۲۵) (صفحه ۱۰) (۰.۲۵) بازه‌های نزولی: $[-1, 4] \cup [6, 8]$ (۰.۲۵) (۰.۲۵) بازه ثابت: $[-1, 2]$ (۰.۲۵) مسیر تمرینی: مشابه این سوال در سوال ۳ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴ مطرح شده بود.	۱/۲۵
۴	مصحح شو $f(x) = x + a$, $g(x) = ax^2 + bx + c$ (صفحه ۲۲)	۱

	$\text{fog}(x) = f(g(x)) = g(x) + a = ax^2 + bx + c + a = x^2 - 3x + 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ (} \cdot 25 \text{)} \\ b = -3 \text{ (} \cdot 25 \text{)} \\ c = 3 \text{ (} \cdot 25 \text{)} \end{cases}$ سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه ترکیب توابع اگر f و g دو تابع باشند، fog را ترکیب $f(g(x))$ می‌گوییم، یعنی در $f(x)$ به جای x ها، تابع $g(x)$ را جایگذاری می‌کنیم. به همین ترتیب: $(\text{gof})(x) = g(f(x))$ $(\text{fof})(x) = f(f(x))$	
۱/۲۵	مصّحّح شو صفحه ۲۲) $f(x) = \sqrt{x+2}, g(x) = \sqrt{x^2-16} \Rightarrow D_f = [-2, +\infty), D_g = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$ (۰.۲۵) $\xrightarrow{(0.25)} D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [-2, +\infty) \mid \sqrt{x+2} \geq 4\}$ (۰.۲۵) $= \{x \in [-2, +\infty) \mid x+2 \geq 16\} = \{x \in [-2, +\infty) \mid x \geq 14\} = [14, +\infty)$ (۰.۲۵) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه	۵
۰/۷۵	مصّحّح شو $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14, f(x) = 3x - 4$ به دنبال ضابطه $g(x)$ هستیم: (صفحه ۲۲) $f(g(x)) = 3g(x) - 4 = 3x^2 - 6x + 14$ (۰.۲۵) $\Rightarrow 3g(x) = 3x^2 - 6x + 18 \Rightarrow g(x) = x^2 - 2x + 6$ (۰.۲۵) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه راهنمای مصحح: به روش‌های درست دیگر به تناسب نمره تعلق می‌گیرد. مسیر تمرینی: مشابه این سوال در سوال ۴ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴ مطرح شده بود.	۶
۱	مصّحّح شو روش اول: برای انتقال سهمی، ابتدا مربع کامل سازی انجام می‌دهیم: (صفحه ۲۲) $f(x) = x^2 + 3x - 1 = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4} \xrightarrow{\text{واحد به پایین}} f(x) = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{21}{4}$ (۰.۲۵) $\xrightarrow{\text{واحد به چپ}} f(x) = (x + 1 + \frac{3}{2})^2 - \frac{21}{4} = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{21}{4} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور X ها}} f(x) = \frac{21}{4} - (x + \frac{5}{2})^2$ (۰.۲۵)	۷

روش دوم:

$$f(x) = x^2 + 3x - 1 \xrightarrow{\text{واحد به پایین}} f(x) = x^2 + 3x - 3 \xrightarrow{\text{واحد به چپ}} f(x) = (x+1)^2 + 3(x+1) - 3$$

(۰.۲۵) (۰.۵)

قرینه نسبت به محور Xها $\rightarrow f(x) = -(x+1)^2 - 3(x+1) + 3$ (۰.۲۵)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه

نقشه نهایی:

درسته که هر دو روش نمره دارن، ولی سعی کنین خودتون رو به مربع کامل‌سازی عادت بدین! هم سریع‌تره و هم احتمال اشکال محاسباتی رو کمتر می‌کنه!

مصحح شو

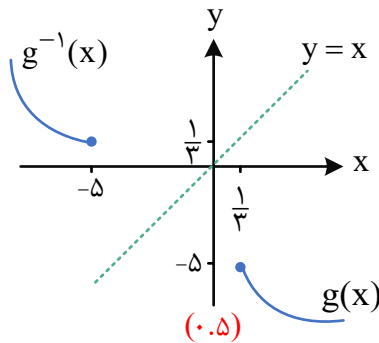
الف) ابتدا X را بر حسب Y پیدا می‌کنیم و سپس جای X و Y را عوض می‌کنیم: (صفحه ۲۹)

$$y = -5 - \sqrt{3x-1} \Rightarrow y+5 = -\sqrt{3x-1} \xrightarrow{y \leq -5} y^2 + 10y + 25 = 3x - 1$$

(۰.۲۵) (۰.۲۵)

$$\Rightarrow y^2 + 10y + 26 = 3x \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x^2 + 10x + 26}{3}; (x \leq -5) \quad (۰.۲۵)$$

ب) هر یک را با دامنه خود رسم می‌کنیم:



سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه

نقشه نهایی:

وقتی دارین وارون حساب می‌کنین، حتماً حواستون به دامنه و برد باشد که یوقت اشتباه نشه (مخصوصاً تو این رادیکال)

مصحح شو

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi \quad (۴۱) \quad (۰.۲۵)$$

$$\max = \sqrt{5} + \pi, \quad \min = \sqrt{5} - \pi$$

(۰.۲۵) (۰.۲۵)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه

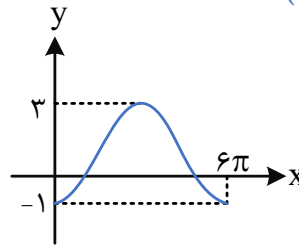
مسیر تمرینی:

مشابه این سوال در سوال ۶ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳ مطرح شده بود.

مصّحّح شو

با توجه به نمودار، تابع از $x = 0$ صعودی عبور کرده و در نتیجه $a < 0$ (نمودار برعکس $y = \cos x$ است). دوره تناوب تابع 6π بوده و بنابراین: (صفحه ۴۱)

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 6\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3} \quad (0.25)$$



همچنین داریم:

$$\min = -1, \max = 3 \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = 3 \\ -|a| + c = -1 \end{cases} \Rightarrow |a| = 2 \xrightarrow{a < 0} a = -2 \quad (0.25), c = 1 \quad (0.25)$$

و بنابراین ضابطه تابع می‌شود: $y = -2 \cos(\pm \frac{x}{3}) + 1 \quad (0.25)$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه

توابع مثلثاتی:

در توابع مثلثاتی $y = a \sin(bx + d) + c$ و $y = a \cos(bx + d) + c$ داریم:

$$\begin{cases} \max = |a| + c \\ \min = -|a| + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = \frac{\max - \min}{2} \\ c = \frac{\max + \min}{2} \end{cases}$$

$$\text{دوره تناوب} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

در تابع مثلثاتی $y = a \tan(bx) + c$ دوره تناوب برابر است با:

$$T = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

فرم کلی توابع مثلثاتی $y = a \sin(bx)$ و $y = a \cos(bx)$:

$y = a \sin(bx)$		$y = a \cos(bx)$	
$ab < 0$	$ab > 0$	$a < 0$	$a > 0$

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال در سوال ۶ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصّحّح شو

روش اول: می‌دانیم $\sin$ و $\cos$ دو زاویه متمم با یکدیگر برابرند، پس چون

$$67^\circ / 5^\circ + 22^\circ / 5^\circ = 90^\circ \Rightarrow \cos 67^\circ / 5^\circ = \sin 22^\circ / 5^\circ \quad (0.25)$$

به کمک رابطه $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ داریم: (صفحه ۴۸)

$$(\cdot.۲۵) \sin^2 ۲۲/۵^\circ = \frac{1 - \cos ۴۵^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin ۲۲/۵^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} (\cdot.۲۵)$$

روش دوم: به کمک رابطه $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ داریم: (۰.۲۵)

$$(\cdot.۲۵) \cos^2 ۶۷/۵^\circ = \frac{1 + \cos(۱۳۵^\circ)}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos ۶۷/۵^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} (\cdot.۲۵)$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

روابط مثلثاتی مهم

$$*\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$*\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad * \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$*1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \cos \alpha \neq 0$$

$$*1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \sin \alpha \neq 0$$

$$*\tan \alpha \times \cot \alpha = 1; \alpha \neq \frac{k\pi}{2}$$

$$*\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$*\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \xrightarrow{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \begin{cases} \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{cases}$$

راهنمای مصحح:

به روش‌های درست دیگر نمره تعلق می‌گیرد.

مصحح شو

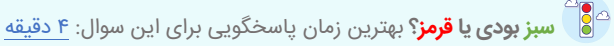
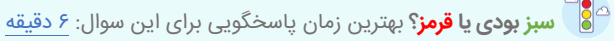
از آن‌جا که مساحت مثلث ۳ سانتی‌متر مربع و طول دو ضلع را داریم، با استفاده از رابطه $S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$ داریم:

(صفحه ۴۸)

$$\frac{1}{2} \times ۲ \times ۶ \times \sin \hat{C} = ۳ \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{C} = \frac{\pi}{6} \text{ یا } \frac{5\pi}{6} (\cdot.۲۵) \quad (\cdot.۲۵) \quad (\cdot.۲۵) \quad (\cdot.۲۵)$$

بنابراین دو مثلث با این شرایط وجود دارد. (۰.۲۵)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه

	 برای آن که $p(x)$ بر $x+2$ بخش پذیر باشد باید به ازای ریشه $x+2$ صفر شود: (صفحه ۵۷) $x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow p(-2)=0 \Rightarrow p(-2)=-16+4a+2b+2=0$ $\Rightarrow 4a+2b=14 \Rightarrow 2a+b=7 \text{ (I) } (0.25)$ همچنین چون باقی مانده بر $x-1$، 2 شده، پس باید به ازای ریشه $x-1$، $p(x)$ برابر 2 شود: $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow p(1)=2 \Rightarrow 2+a-b+2=2 \Rightarrow a-b=-2 \text{ (II) } (0.25)$ حال با استفاده از (I) و (II)، a و b را می‌یابیم: $\begin{cases} 2a+b=7 \\ a-b=-2 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 3a=5 \Rightarrow a=\frac{5}{3}, b=\frac{11}{3}$ (0.25) (0.25)   در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای درجه اول $(ax+b)$، باقی‌مانده تقسیم برابر $f(-\frac{b}{a})$ است. نتیجه: اگر $f(-\frac{b}{a})=0$ باشد، به این معنی است که $f(x)$ بر $(ax+b)$ بخش پذیر است.	۱۳
۰/۵ ۰/۷۵ ۰/۵ ۰/۵	 (الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+5x-6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+6)} = \frac{2}{7} \text{ (صفحه ۵۷) } (0.25)$ (0.25) (ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(x-2)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$ (0.25) (صفحه ۵۷) $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)}{(x-1)(x-2)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = -\frac{1}{3} \text{ (0.25)}$ (0.25) (پ) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x]-1}{x^2-4} = \frac{-3}{\cdot+} = -\infty \text{ (صفحه ۶۴) } (0.25)$ (0.25) (ت) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-(1-x)^3}{2x-x^2+5x^3} \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{5x^3} = \frac{1}{5} \text{ (صفحه ۶۴) } (0.25)$ (0.25) (0.25) 	۱۴

الف) محاسبه حد توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح

وقتی به جزء صحیح و یا قدرمطلق برخورد می‌کنیم، باید جزء صحیح را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم:

$$* \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{\left[\begin{smallmatrix} - \\ 0 \end{smallmatrix} \right]}{\begin{smallmatrix} 0 \\ - \end{smallmatrix}} = \frac{-1}{-} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \frac{\left[\begin{smallmatrix} 3^- \end{smallmatrix} \right] - 3}{\begin{smallmatrix} 3^- \\ - \end{smallmatrix}} = \frac{2 - 3}{-} = \frac{-1}{-} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x - 3|} = \frac{2}{\left| \begin{smallmatrix} 3^\pm \\ - \end{smallmatrix} \right|} = \frac{2}{+} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})} \frac{[x]}{|3x + 1|} = \frac{\left[\begin{smallmatrix} - \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix} \right]}{\left| 3 \left(-\frac{1}{3} \right)^\pm + 1 \right|} = \frac{-1}{+} = -\infty$$

ب) محاسبه حد بی‌نهایت در توابع کسری

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر حد تابع صورت کسر عددی مخالف صفر و حد تابع مخرج کسر برابر صفر باشد، در این صورت، حاصل حد، نامتناهی ($+\infty$ یا $-\infty$) خواهد بود.

توجه: برای تعیین علامت ∞ ، باید به علامت صورت و علامت مخرج کسر توجه کنیم:

$\frac{+ \text{ عدد}}{+} = +\infty$	$\frac{- \text{ عدد}}{-} = +\infty$	$\frac{+ \text{ عدد}}{-} = -\infty$	$\frac{- \text{ عدد}}{+} = -\infty$
-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

یه نمونه باحال

حدود زیر را محاسبه کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x - 5} = \frac{2 \times 5}{\begin{smallmatrix} 5^- \\ - \end{smallmatrix}} = \frac{10}{-} = -\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x + 1}{(2x + 1)^2} = \frac{4 \left(-\frac{1}{2} \right) + 1}{\left(2 \left(-\frac{1}{2} \right)^\pm + 1 \right)^2} = \frac{-2 + 1}{((-1)^\pm + 1)^2} = \frac{-1}{+} = -\infty$$

پ) رفع ابهام صفر- صفر در توابع کسری

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر حد هر دو تابع f و g در $x = a$ برابر صفر باشد به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ خواهیم رسید و باید آن حد را به کمک اتحادها، گویا کردن و ... رفع ابهام کنیم.

در نوعی از سوالات این حالت، صورت یا مخرج کسر (و یا گاهی هر دو) شامل عبارت‌های رادیکالی است که برای رفع ابهام از آن ابتدا باید صورت و مخرج کسر را در عبارت رادیکالی مناسب ضرب کنیم تا بتوانیم با استفاده از اتحاد مزدوج (و یا گاهی چاق و لاغر) عامل صفرکننده را شناسایی کرده و آن را از صورت و مخرج کسر حذف کنیم.

یادآوری:

$$\begin{cases} (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b \\ (\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a \pm b \end{cases}$$

	مسیر تمرینی: مشابه این سوال در سوال ۸ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳ مطرح شده بود.	
۱	مصّحّح شو الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ (۰.۲۵) (صفحه ۶۴) ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ (۰.۲۵) پ) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$ (۰.۲۵) ت) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$ (۰.۲۵) ۱۵	
۱	مصّحّح شو الف) E (۰.۲۵) ب) B (۰.۲۵) پ) C (۰.۲۵) ت) $m_A < m_D = 0$ (۰.۲۵) (شیب در A منفی و در D، صفر است) (صفحه ۷۶) ۱۶	
۰/۷۵	مصّحّح شو با توجه به این که خط d در نقطه (۲, ۶) بر تابع f مماس است، پس: $f(2) = 6$ و در نتیجه با توجه به تعریف مشتق داریم: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-f'(2)}{2} \quad (\text{صفحه ۷۶})$ همچنین چون دو نقطه از d را داریم، از آن جا که $f'(2) = m_d$، به ادامه حل می‌پردازیم: $(2, 6), (0, 10) \Rightarrow m_d = f'(2) = \frac{10 - 6}{0 - 2} = -2$ و در نتیجه حاصل حد خواسته شده برابر است با: $\frac{-(-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad (۰.۲۵)$ ۱۷	

	شیب خط مماس شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ به شرط آن‌که این حد موجود و متناهی باشد. حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ مسیر تمرینی: مشابه این سوال در سوال ۹ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳ مطرح شده بود.	
۱/۵	مصحح شو روش اول: با توجه به تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x = -1$ می‌شود: (صفحه ۷۶) $f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1-(-1+h)} - \frac{1}{1-(-1)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2-h} - \frac{1}{2}}{h} \quad (0.25)$ $\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - (2-h)}{2h(2-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2h(2-h)} = \frac{1}{4} \quad (0.5)$ روش دوم: با استفاده از تعریف دیگر مشتق داریم: $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-(-1)}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - (1-x)}{2(x+1)(1-x)} \quad (0.25)$ $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{x+1}}{2(\cancel{x+1})(1-x)} = \frac{1}{4} \quad (0.5)$ سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه	۱۸
۲۰	موفق باشید.	